Μαθημα 7ο 21/3/2017

Τοπολογια

παραδειγμα

$Q^o$, $\bar{Q}$, $Q'$, $\partial Q$, $A = Q \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$

i) $Q^o \ni x \iff \exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq Q$ δεν μπορει να $Q^o = \emptyset$

ii) $\bar{Q} = ;$

$x \in \bar{Q} \iff \forall \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap Q = \emptyset$

$\mathbb{R}$

$Q' \iff \forall \varepsilon > 0 \ ((x-\varepsilon, x+\varepsilon) - \{x\}) \cap Q \neq \emptyset$ $\forall \varepsilon > 0$ Αληθες $\forall x \in \mathbb{R}$

$Q' = \mathbb{R}$

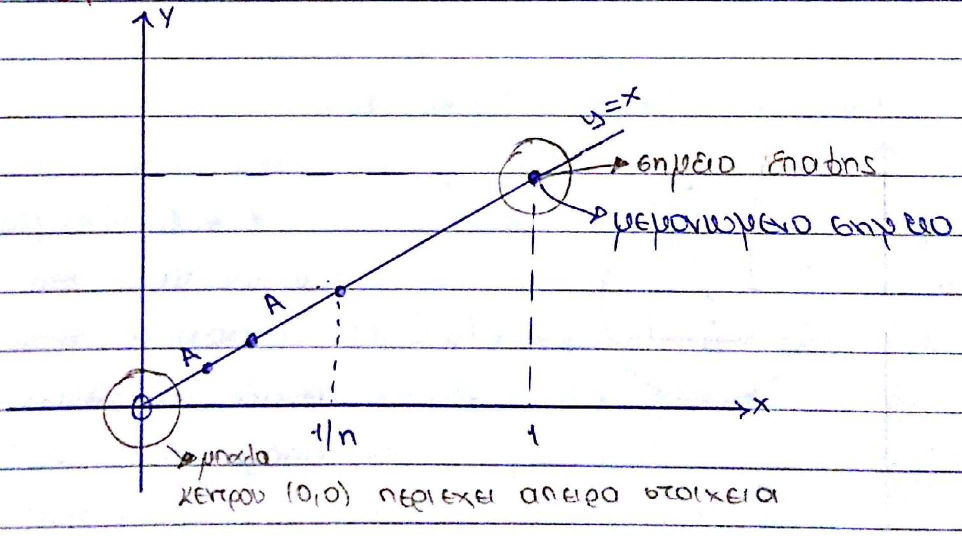
$\partial Q = \bar{Q} - Q^o = \bar{Q} - \mathbb{R}$

παραδειγμα

Θεωρω στο $(\mathbb{R}^2, \rho)$ το συνολο $A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), n = 1, 2, \dots \right\}$

Βρειτε τα $A^o$, $\bar{A}$, $A'$, $\partial A$

απαντηση




$A^o \ni x \iff \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A$ δεν ειναι αληθες για κανενα $x \in A$. Αρα $A^o = \emptyset$

$\bar{A} \iff \forall \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$A \subseteq \bar{A}$ . Αρα $\bar{A} = A \cup \{(0,0)\}$

! Τα σημεια συσσωρευσης τα αναζητουμε στα σημεια επαφης

Αρα εχουμε $A' = \{(0,0)\}$

Επισης $\bar{A} = A \cup A'$

Παρατηρηση

Γνωριζουμε πότε $x \in A'$.

Ποτε το $x$ μεμ. σημειο; Οταν δεν ειναι σημειο συσσωρ.

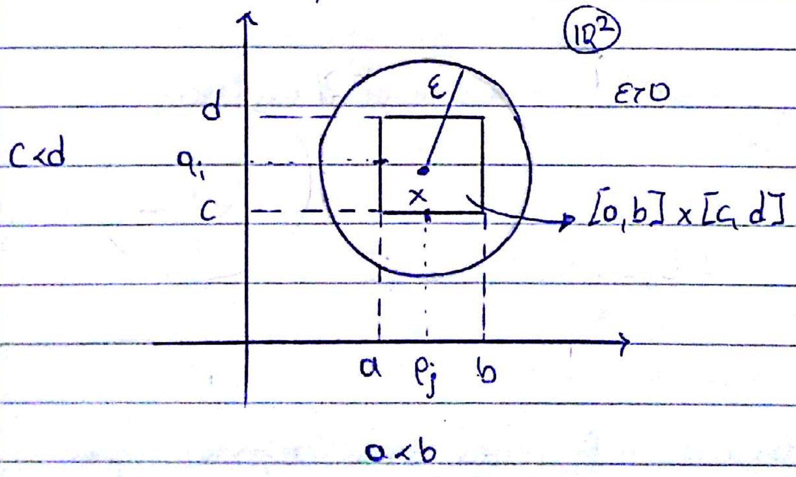
$$\left\{ \begin{array}{l} x \notin A' \iff \exists \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\} \\ x \in A \end{array} \right.$$

Προκυπτει απο την αρνηση του ορισμου

Ασκηση 63, σελιδα 389 ⇒ Σπιτι

Ασκηση

$A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \subseteq (\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ . Ποια η θηκη $\bar{A} =$;




⊕ Αν βρω το πληθος αυτων μεσα στο τετραγωνο τοτε θα ανηκει και μεσα στη μπαλα

$\overline{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}}^{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2$

## Άσκηση

Έστω ο $(E,\rho)$ μ.χ και ένα σύνολο $A \neq \emptyset$ κλειστό και $A \subseteq E$. Τότε $\iff A' \subseteq A$

## Λύση

$(\Rightarrow)$ $A = \bar{A} = A \cup A' \supseteq A' \Rightarrow A' \subseteq A$ είναι προφανή

$(\Leftarrow)$ Αν $A' \subseteq A$ τότε $\bar{A} = A$ (?)

$\bar{A} = A \cup A' \subseteq A \cup A = A \Rightarrow \bar{A} \subseteq A$ φανερά όμως $A \subseteq \bar{A}$

οπότε έχουμε το ζητούμενο $A = \bar{A}$

## Πρόταση / Άσκηση

Έστω $(E,\rho)$ μ.χ και ένα σύνολο $A \neq \emptyset$ και $A \subseteq E$ τότε το $A^o$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $E$ και μάλιστα το "μεγαλύτερο" ανοιχτό υποσύνολο του $E$ που περιέχεται στο $A$ ⊛

## Λύση

$(A^o)^o = A^o \Rightarrow A^o$ ανοιχτό $\subseteq A$

⊛ Μας λέει ότι:

αν $B \subseteq A$, $B$ ανοιχτό $\Rightarrow B \subseteq A^o$

$B \subseteq A \Rightarrow B^o \subseteq A^o$ επειδή όμως $B$ ανοιχτό ισχύει $B = B^o$

οπότε $B \subseteq A^o$ αυτό που θέλαμε

## Πόρισμα (Συνεπάγεται από την πρόταση πάνω ↑)

$A^o = \bigcup \{X \subseteq E : X$ ανοιχτό και $X \subseteq A\}$

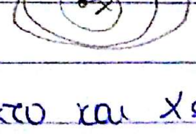
## Απόδειξη

Θεωρώ το σύνολο $B = \{X \subseteq E : X$ ανοιχτό και $X \subseteq A\}$

$B$ ανοιχτό ως ένωση ανοιχτών και $B \subseteq A$. Συνεπώς $B \subseteq A^o$

Δείξαμε την κατεύθυνση $(\supseteq)$ $[B \subseteq A^o]$

Αντίστροφα $(\subseteq)$ $[A^o \subseteq B]$




Την κάνω όσο μεγάλη μπορώ για να πιάσει σύνορο.

$x \in A^o \xrightarrow{\text{νδο}} x \in B$

$x \in A^o \Rightarrow (\exists\, r > 0) : \underbrace{B(x,r)}_{= X} \subseteq A$ με $X$ ανοιχτό και $X \subseteq A$

$B(x, r_x) \subseteq A$

$x \in A^o$

$x \in X \Rightarrow x \in B$

παραδειγμα

$(E,\rho)$ μ.χ και συνολο $A \neq \emptyset$ και $A \subseteq E$

$A \subseteq \bar{A}$ ( $\bar{A}$ ειναι κλειστο $\supseteq A$ και μαλιστα το "μικροτερο" με αυτες τις ιδιοτητες)

$\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ Αν ① $B \supseteq A$ ② $B$ κλειστο $\Big\} \Rightarrow \bar{A} \subseteq B$

① $\Rightarrow \bar{B} \supseteq \bar{A}$
$\overset{\parallel ②}{B}$ Αρα $B \supseteq \bar{A}$

Πορισμα

$\bar{A} = \cap \{Y : Y \supseteq A, Y \text{ κλειστό} \subseteq E\}$

Ασκηση $\Rightarrow$ Σπιτι

⊛ $(E,\rho)$ ειναι ανοιχτος χωρος; με $A = E$
Ειναι ανοιχτό γιατι ολα βρισκονται μεσα στο $E$
Επισης ειναι και κλειστό γιατι $\bar{E} = E$, $E \supseteq \bar{E} \supseteq E$

⊛ $E^c = \emptyset$. Το κενο συνολο $(\emptyset)$ ειναι επισης ανοιχτό και κλειστο συνολο

Ισχυει

1) $\partial A$ παντα κλειστο, $A \subseteq E$, $(E,\rho)$ μ.χ

αποδειξη τομη κλειστων συνολων

$\partial A = \bar{A} - A^o = \bar{A} \cap (A^o)^c \Rightarrow$ κλειστο οχι μονο η θηκη αλλα και το σ.σ ειναι κλειστο

Ασκηση

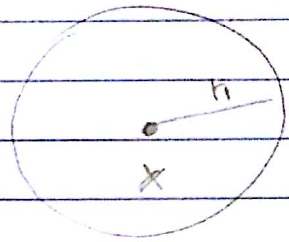
Εστω $(E,\rho)$ μ.χ και συνολο $A \neq \emptyset$ και $A \subseteq E$ τοτε $A'$ κλειστο

Λυση

Αρκει νδο $\overline{A'} = A'$ ή ισοδυναμα αρκει νδο $\overline{A'} \subseteq A'$
$\{ A' \subseteq \overline{A'}$ ισχυει παντα$\}$

Εστω $\underbrace{x \in \overline{A'}}_{①} \xrightarrow{\text{νδο}} \underbrace{x \in A'}_{②} \Leftrightarrow \underbrace{(\forall r_1 > 0)\ (B(x, r_1) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset}_{②}$

① $\Rightarrow (\forall r > 0) : B(x,r) \cap A' \neq \emptyset$ (ορισμος) ③





Σταθεροποιω ενα $r_1 > 0$ και δειχνω οτι
ισχυει η ②

$\exists\ \underbrace{y_{r_1}}_{=y} \in B(x, r_1) \cap A'$

Διακρινω τις περιπτωσεις

$1^{η}$ περ: Αν $y = x$ (με $y \in A'$)

Τοτε $x \in A'$ (προφανη)

$2^{η}$ περ: Αν $y \neq x$

$y \in B(x,r) \cap A'$

Τοτε (ως ασκηση) $\exists\ \varepsilon > 0 : B(y,\varepsilon) \subseteq B(x,r) - \{x\}$

$y \in A' \Rightarrow (\underbrace{B(y,\varepsilon) - \{y\}}_{\exists z \in}) \cap A \neq \emptyset$

Αρα $z \in (B(x, r_1) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$

Κανε την αποδειξη ΜΟΝΟΣ!!!
Ετσι!!!

Ασκηση

Εστω $(E,\rho)$ μ.χ και συνολο $A \neq \emptyset$ με A φραγμενο και $A \subseteq E$

$\Rightarrow$ Δειξε οτι $A'$ φραγμενο και $\delta(A') \leq \delta(A)$

Λυση

$A \subseteq \bar{A} \Rightarrow \delta(A) \leq \delta(\bar{A})$

$\delta(\bar{A}) \leq \delta(A)$ (ισχυει) ①

ιδια αποδειξη με ① που εχουμε κανει ειναι και η αποδειξη $\delta(A') \leq \delta(A)$

$\delta(A') \leq \delta(A) = \delta(\bar{A})$ ισχυει;

Ισχυει οτι $A \cup A' = \bar{A} \Rightarrow \delta(A') \leq \delta(\bar{A}) = \delta(A)$ κομπλε

Ασκηση

Εστω $(E,\rho)$ μ.χ και δυο συνολα $A, B \subseteq E$ ωστε:

$A \cup B = E$ τοτε δειξε οτι: $\bar{A} \cup B^{o} = E$

Λυση

Αρκει νδο $E \subseteq \bar{A} \cup B^{o}$

Εστω $x \in E \xRightarrow{\text{νδο}} x \in \bar{A} \cup B^{o}$

Εστω επιπλεον οτι $x \notin \bar{A} \Rightarrow x \in \underbrace{(\bar{A})^{c}}_{\text{ανοιχτο}} \Rightarrow$

$\exists\, r > 0 : B(x,r) \subseteq (\bar{A})^{c}$

$B(x,r) \subseteq (\bar{A})^{c} \Rightarrow B(x,r) \cap \bar{A} = \emptyset \Rightarrow B(x,r) \cap A = \emptyset \overset{①}{\Rightarrow}$

$B(x,r) \subseteq B \Rightarrow x \in B^{o}$

① $E = A \cup B$